УДК 622.625.6

Гутаревич В. О.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ МОНОРЕЛЬСОВОГО ПУТИ ШАХТНОЙ ПОДВЕСНОЙ ДОРОГИ

Работа шахтной подвесной монорельсовой дороги, когда происходит движение состава по монорельсу, связана с силовыми действиями, обусловленными реализацией тягового и тормозного усилий, перемещением груза, изменчивостью ускорений, наличием стыков и неровностью пути [1–4]. В результате этого наблюдаются колебания, приводящие к дополнительным затратам энергии, деформации самого пути и его подвешивания, включая крепь горной выработки. Вследствие чего ухудшаются эффективность, снижается надежность и повышается аварийность работы. С ростом скорости движения и массовой нагрузки на монорельс негативные последствия многократно усиливаются, что в значительной мере ограничивает возможность их эксплуатации.

Цель работы заключается в установлении взаимосвязи между поперечными колебаниями монорельсового пути и параметрами подвесной дороги.

Во время движения подвесной дороги возникает изгиб упругой линии монорельса. Уравнение изгиба будет [5, 6]:

$$-EJ\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} = M_u, \tag{1}$$

где E – модуль упругости материала монорельса;

J – момент инерции поперечного сечения монорельса относительно его продольной оси;

z – поперечное перемещение монорельса в точке x;

M_u – момент инерции поперечного сечения монорельса относительно его продольной оси.

Приведенное уравнение (1) справедливо, поскольку поперечные размеры монорельса малы относительно его длины.

После дифференцирования по x получим:

$$-\frac{d}{dx}\left(EJ\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{dM_u}{dx} = Q(x,t), \tag{2}$$

где $Q(x,t)$ – перерезывающая сила, действующая на монорельс в точке x.

В результате вторичного дифференцирования по x установим интенсивность нагрузки $q(x,t)$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = -\frac{dQ}{dx} = q(x,t). \tag{3}$$

С учетом принципа Даламбера уравнение поперечного перемещения принимает вид:

$$\rho_\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = q(x,t), \tag{4}$$

где $\rho_\gamma \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ – силы, устанавливаемые согласно принципу Даламбера.

Полученное уравнение (4) учитывает интенсивность нагрузки, возникающей при перемещении подвесного состава по монорельсу и, в общем случае, изменяющейся во времени. Когда перемещение состава не происходит и поперечное сечение не изменяется, то это уравнение приобретает вид свободных поперечных колебаний монорельса:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + r^2 \frac{d^4 z}{dx^4} = 0, \tag{5}$$

где $r = \sqrt{\dfrac{EJ}{\rho_\gamma}}$.

Решение уравнения (5) может быть получено аналогично, как и для продольных колебаний. Отличие заключается в том, что необходимо учитывать для каждого конца монорельса по два граничных условия.

Например, когда отрезок монорельса подвешен за концы, а один из концов зафиксирован от продольного перемещения, то смещения и изгибающие моменты равны:

$$(z)_{\substack{x=0\\x=L}} = 0; \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\x=L}} = 0. \tag{6}$$

Если оба конца монорельса закреплены неподвижно, то смещения и изгибающие моменты равны:

$$(z)_{\substack{x=0\\x=L}} = 0; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=L}} = 0. \tag{7}$$

Возможны и другие сочетания граничных условий, когда монорельс имеет дополнительные промежуточные крепления или подвешивается на упругие опоры.

Начальные условия, которые задаются в момент $t = 0$, аналогично как для продольных колебаний, устанавливаются смещением и скоростью:

$$z(x,0) = \varphi_1(x); \qquad \dot{z}(x,0) = \varphi_2(x). \tag{8}$$

Частное решение уравнения (5) найдем в виде произведения двух функций:

$$z(x,t) = T(x)X(x). \tag{9}$$

После подстановки имеем:

$$\frac{T''(t)}{r^2 T(t)} = -\frac{X^{IV}(x)}{X(x)} = -a_z^4, \tag{10}$$

где a_z – постоянная, характеризующая указанные соотношения.

Отсюда следует:

$$T'' = \omega^2 T = 0, \tag{11}$$

$$X^{IV} - a_z^4 X = 0, \tag{12}$$

где $\omega^2 = r^2 a_z^4$ или:

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ}{\rho_\gamma}} a_z^2 . \tag{13}$$

Общее решение уравнения (11) аналогично, как и для продольных колебаний, будет:

$$T(t) = A_r \cos \omega t + B_r \sin \omega t = P_r \cos(\omega t - \varphi_r), \tag{14}$$

где A_r, B_r, P_r, φ_r – произвольные постоянные.
Для уравнения (12) решение будем искать в следующем виде:

$$X = e^{\psi x}. \tag{15}$$

Тогда, характеристическое запишем уравнение:

$$\psi^4 - a_z^4 = 0. \tag{16}$$

Корнями этого уравнения будут:

$$\psi_1 = a_z ; \psi_2 = -a_z ; \psi_3 = ja_z ; \psi_4 = ja_z . \tag{17}$$

Отсюда следует общее решение уравнения (12) :

$$X(x) = A_{r1} e^{a_z x} + A_{r2} e^{-a_z x} + A_{r3} e^{ja_z x} + A_{r4} e^{-ja_z x}. \tag{18}$$

Это решение можно представить как:

$$X(x) = B_{r1} \cos a_z x + B_{r2} \sin a_z x + B_{r3} \mathrm{ch} a_z x + B_{r4} \mathrm{sh} a_z x . \tag{19}$$

Используя функции частот Крылова [6, 7], уравнение (19) имеет вид:

$$X(x) = 2c_{r1} S_z(a_z x) + 2d_{r1} T_z(a_z x) + 2e_{r1} U_z(a_z x) + 2 f_{r1} V_z(a_z x), \tag{20}$$

где $c_{r1}, d_{r1}, e_{r1}, f_{r1}$ – постоянные, определяемые граничными условиями; $2S_z(a_z x), 2T_z(a_z x), 2U_z(a_z x), 2V_z(a_z x)$ – функции частот, равные:

$$\left.\begin{aligned} 2S_z(a_z x) &= \mathrm{ch}(a_z x) + \cos(a_z x); \\ 2T_z(a_z x) &= \mathrm{sh}(a_z x) + \sin(a_z x); \\ 2U_z(a_z x) &= \mathrm{ch}(a_z x) - \cos(a_z x); \\ 2V_z(a_z x) &= \mathrm{sh}(a_z x) - \sin(a_z x). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Рассмотрим случай, когда отрезок монорельса жестко закреплен с двух сторон. Учитывая начальные условия (7) и (9), имеем:

$$(X)_{\substack{x=0\\x=L}} = 0, \quad \left(\frac{dX}{dt}\right)_{\substack{x=0\\x=L}} = 0. \tag{22}$$

Используя выражение (20), когда $x = 0$, получаем $c_{r1} = 0, d_{r1} = 0$. Для другого конца отрезка монорельса, когда $x = L$, используя свойства круговой замены функций частот [6], можно записать:

$$\begin{cases} e_{r1}U_z(a_zL) + f_{r1}V_z(a_zL) = 0; \\ e_{r1}a_zT_z(a_zL) + f_{r1}U_z(a_zL) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Найдем определитель для этой системы уравнений:

$$\begin{vmatrix} U_z(a_zL) & V_z(a_zL) \\ T_z(a_zL) & U_z(a_zL) \end{vmatrix} = 0. \tag{24}$$

Если раскрыть определитель (24), то характеристическое уравнение имеет вид $D(a_zL) = 0$.

Отсюда:

$$\mathrm{ch}\sigma\cos\sigma - 1 = 0, \tag{25}$$

где $\sigma = a_zL$.

Уравнение (25) можно представить в виде:

$$\cos\sigma = \frac{1}{\mathrm{ch}\sigma}. \tag{26}$$

Решение уравнения (26) легко получить графически построением каждой из его частей, когда корни $\sigma_0 = 0$; $\pm\sigma_1$; $\pm\sigma_2$; $\pm\sigma_3$... устанавливаются точками пересечения кривых. Более точное решение находится с учетом [8]:

$$\sigma_i = (2i - 1)\frac{\pi}{2}, \tag{27}$$

где $i = 3, 4, 5$ ...

Тогда для (13) получаем:

$$\omega_i = \frac{\sigma_i^2}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho_\lambda}}. \tag{28}$$

Для случая, когда отрезок монорельса жестко закреплен только с одной стороны, а с другой подвешен, можно аналогично получить характеристическое уравнение $B(a_zL) = 0$ и корни уравнения:

$$\sigma_i = (4i - 1)\frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

Если отрезок монорельса подвешен за оба конца, то характеристическое уравнение будет $F(a_z L) = 0$, а корни уравнения равны $\sigma_i = \pi i$.

Следует отметить, что корни σ_i обращают определитель (24) в нуль. Это позволяет из (23) установить отношения:

$$\frac{e_{r1}}{f_{r1}} = -\frac{\operatorname{sh}\sigma - \sin\sigma}{\operatorname{ch}\sigma - \cos\sigma} = -\frac{\operatorname{ch}\sigma - \cos\sigma}{\operatorname{sh}\sigma - \sin\sigma}. \tag{30}$$

В общем виде:

$$\left.\begin{aligned} e_{r1} &= D(\operatorname{sh}a_z L - \sin a_z L); \\ f_{r1} &= -D(\operatorname{ch}a_z L - \cos a_z L). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

В выражении (31) можно считать D= 1, поскольку в решении (9) имеется произвольная постоянная P_r (14), которая представлена в виде множителя.

На основании этого имеем ряд частных решений (9) для уравнения (5) :

$$\begin{gathered} z_i(x,t) = X_i P_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) = P_i(\cos\omega_i t - \varphi_i)[(\operatorname{sh}a_{zi}L - \sin a_{zi}L)(\operatorname{ch}a_{zi}x - \cos a_{zi}x) - \\ -(\operatorname{ch}a_{zi}L - \cos a_{zi}L)(\operatorname{sh}a_{zi}x - \sin a_{zi}x)]. \end{gathered} \tag{32}$$

Кроме того, для уравнения (5) решением будет:

$$z_i(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i P_i \cos(\omega_i t - \varphi_i). \tag{33}$$

Здесь важным обстоятельством является то, что нет смысла учитывать отрицательное значение корней σ_i, поскольку для решения (32) нечетности выражения в квадратных скобках устанавливают значения z_i, как и положительные корни.

Для определения постоянных P_i и φ_i используем начальное распределение (8).

Запишем уравнение (33) как сумму:

$$z_i(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos\omega_i t + b_i \sin\omega_i t) X_i, \tag{34}$$

где

$$P_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}; \qquad \varphi_i = \operatorname{arctg}\frac{b_i}{a_i}. \tag{35}$$

После подстановки начальных условий (8) в (34) имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i X_i(x) = \varphi_1(x); \tag{36}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i b_i X_i(x) = \varphi_2(x). \tag{37}$$

Учитывая, что $X_i(x)$ удовлетворяет соотношению ортогональности [9], то для отрезка монорельса [0, L] можем записать:

$$\int_0^L X_i(x)X_j(x)dx \begin{cases} = 0 & \text{при } i \neq j; \\ \neq 0 & \text{при } i = j. \end{cases} \qquad (38)$$

Для определения коэффициентов a_i и b_i обе части выражения (36) разложим в ряд Фурье по $\sin$ и по $\cos$. Умножив обе части этого выражения на X_j, проведя интегрирование в диапазоне [0, L] и учитывая соотношение (38), когда все члены ряда, за исключением одного, у которого $i = j$, имеем:

$$a_i = \frac{\int_0^L \varphi_1(x)X_i(x)dx}{\int_0^L X_i^2(x)dx}; \qquad b_i = \frac{\int_0^L \varphi_2(x)X_i(x)dx}{\omega_i \int_0^L X_i^2(x)dx}.$$

На основании (34) найденные коэффициенты a_i и b_i позволяют получить окончательное решение уравнения свободных поперечных колебаний монорельса для заданных начальных и конечных условий.

ВЫВОДЫ

Полученные зависимости, устанавливающие взаимосвязь между поперечными колебаниями монорельсового пути и условиями его крепления будут использоваться для обоснованного выбора параметров шахтных монорельсовых дорог. В дальнейшем планируется провести теоретические исследования движения подвесной монорельсовой дороги с учетом колебаний монорельса и подвижного состава.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Введение в теорию устойчивости колесных экипажей и рельсового пути : монография / В. Г. Вербицкий, А. Новак, Э. Даниленко, М. Ситаж. – Донецк : Вебер, 2007. – 255 с.*

2. *Иванченко И. И. Метод подконструкций в задачах динамики скоростной монорельсовой дороги / И. И. Иванченко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – № 6. – С. 101–117.*

3. *Расцветаев В. А. Особенности формирования дополнительных нагрузок на арочную крепь участковых выработок с подвесными монорельсовыми дорогами / В. А. Расцветаев // Науковий вісник НГУ. – 2011. – № 4. – С. 35–38.*

4. *Кузнецов Е. В. Опыт эксплуатации подвесной монорельсовой дороги в условиях шахты ОАО «Разрез Сибиргинский» / Е. В. Кузнецов // Вестник КузГТУ. – 2005. – № 4. – С. 24–26.*

5. *Иориш Ю. И. Виброметрия. Измерение вибрации и ударов. Общая теория, методы и приборы / Ю. И. Иориш. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машгиз, 1963. – 771 с.*

6. *Шевченко Ф. Л. Динамика упругих стержневых систем / Ф. Л. Шевченко. – Донецк : ООО «Лебедь», 1999. – 268 с.*

7. *Шевченко Ф. Л. Упрощенный расчет стержневых систем ступенчато-переменного сечения на продольные колебания как систем с распределенными параметрами / Ф. Л. Шевченко // Наукові праці ДонНТУ. – Донецьк: ДонНТУ. – 2008. – Вип. 5(139). – С. 166–179. – (Серія: «Машинобудування і машинознавство»).*

8. *Стретт Дж.В. (лорд Рэлей) Теория звука. В 2 т. Т. 1 / Дж. В. Стретт. – М. : ГИТТЛ, 1955. – 503 с.*

9. *Смирнов В. И. Курс высшей математики. В 5 т. Т. 2 / В. И. Смирнов. – М. : Наука, 1974. – 656 с.*

Статья поступила в редакцию 20.06.2013 г.